Les bases : exercices corrigés en F

Consignes : Les exercices 2, 4, 6 et 7 sont facultatifs. Dans le cas de l'exercice 5, on pourra se limiter au cas des puissances positives (x^n avec $n \geq 0$).

Objectifs

– Raffiner des problèmes simples ;
– Écrire quelques algorithmes simples ;
– Savoir utiliser les types de base ;
– Savoir utiliser les instructions « élémentaires » : d'entrée/sortie, affichage, bloc...
– Manipuler les conditionnelles ;
– Manipuler les répétitions.

Exercice 1 : Résolution d'une équation du second degré
Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des coefficients réels. Écrire un programme qui saisit les coefficients et affiche les solutions de l'équation.
Indication : Les solutions sont cherchées dans les réels. Ainsi, dans le cas général, en considérant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, l'équation admet comme solutions analytiques :

$$\begin{cases} \Delta < 0 & \text{pas de solutions réelles.} \\ \Delta = 0 & \text{une solution double : } \frac{-b}{2a} \\ \Delta > 0 & \text{deux solutions : } x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Quelles sont les solutions de l'équation si le coefficient a est nul ?

Exercice 2 : Résolution numériquement correcte d'une équation du second degré
Utiliser les formules analytiques de l'exercice 1 pour calculer les solutions réelles de l'équation du second degré n'est pas numériquement satisfaisant. En effet, si la valeur de b est positive et proche de celle de $\sqrt{\Delta}$, le calcul de x_2 comportera au numérateur la soustraction de deux nombres voisins ce qui augmente le risque d'erreur numérique.

Par exemple, considèrons l'équation $x^2 + 62,10x + 1 = 0$ dont les solutions sont approximativement :

$$x_1 = -62,08390$$
$$x_2 = -0,01610723$$

Dans cette équation, la valeur de b^2 est bien plus grande que le produit $4ac$ et le calcul de Δ conduit donc à un nombre très proche de b. Dans les calculs qui suivent, on ne tient compte que des 4 premiers chiffres significatifs.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(62,10)^2 - 4 \times 1 \times 1} = \sqrt{3856 - 4} = 62,06$$

On obtient alors :

$$x_2 = \frac{-62,10 + 62,06}{2} = -0,02$$

L'erreur relative sur x_2 induite est importante :

$$\frac{|-0,01611 + 0,02|}{|-0,01611|} = 0,24 \quad \text{(soit 24\% d'erreur).}$$

En revanche, pour le calcul de x_1 l'addition de deux nombres pratiquement égaux ne pose pas de problème et les calculs conduisent à un erreur relative faible ($3,210^{-4}$).

Pour diminuer l'erreur numérique sur x_2, il suffirait de réorganiser les calculs :

$$x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{-b - \sqrt{\Delta}}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{2a(-b - \sqrt{\Delta})} = \frac{-2c}{b + \sqrt{\Delta}}$$

Mais il existe une solution plus simple qui consiste à calculer d'abord x_1 par la formule classique puis en déduire x_2 en considérant que le produit des racines est égal à c/a ($x_1x_2 = c/a$).

Conclusion : En pratique, si b est négatif, on calcule d'abord la racine $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, si b est positif, on calcule la racine $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. L'autre racine est calculée à l'aide du produit c/a.

Écrire le programme qui calcule les racines réelles de l'équation du second degré en s'appuyant sur cette formule.

Exercice 3 : Le nombre d'occurrences du maximun

Compléter le programme de l'exercice 2 (Exercices résolus en F, Semaine 1) qui calcule les statistiques sur une série de valeurs réelles pour qu'il affiche également le nombre d'occurrences de la plus grande valeur, c'est-à-dire le nombre de valeurs de la série qui correspondent à la valeur maxiamle.

Par exemple, pour la série 1 2 3 1 2 3 3 2 3 1 0, le max est 3 et il y a quatre occurrences de 3. Dans la série 1 2 3 3 3 3 1 2 4 1 2 3 0, il y a une seule occurrence du maximun qui est 4.

Exercice 4 : Nombres amis

Deux nombres N et M sont amis si la somme des diviseurs de M (en excluant M lui-même) est égale à N et la somme des diviseurs de N (en excluant N lui-même) est égale à M.

Écrire un programme qui affiche tous les couples (N, M) de nombres amis tels que $0 < N < M \leq MAX$, MAX étant lu au clavier.

Indication : Les nombres amis compris entre 1 et 100000 sont (220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368), (10744, 10856), (12285, 14595), (17296, 18416), (66928, 66992), (67095, 71145), (63020, 76084), (69615, 87633) et (79750, 88730).

Exercice 5 : Puissance

Calculer et afficher la puissance entière d'un réel.

Exercice 6 : Amélioration du calcul de la puissance entière

Améliorer l'algorithme de calcul de la puissance (exercice 5 du Exercices corrigés en F, Semaine 1) en remarquant que

$$x^n = \begin{cases} (x^2)^p & \text{si } n = 2p \\ (x^2)^p \times x & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour calculer 3^5, on peut faire $3 * 9 * 9$ avec bien sûr $9 = 3^2$.

Exercice 7 : Nombres de Amstrong
Les *nombres de Amstrong* appelés parfois *nombres cubes* sont des nombres entiers qui ont la particularité d'être égaux à la somme des cubes de leurs chiffres. Par exemple, 153 est un nombre de Amstrong car on a :

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3.$$

Afficher tous les nombres de Amstrong sachant qu'ils sont tous compris entre 100 et 499.
Indication : Les nombres de Amstrong sont : 153, 370, 371 et 407.